Негосударственное образовательное учреждение высшего профессионального образования

АКАДЕМИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ГУМАНИТАРНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

ПРИНЯТО
на заседании совета
факультета психологии

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
Ипатов Ю.М.
____
подпись Ф.И.О.
«16»января 2012г.

Протокол заседания совета факультета
№_1 от «16» января _2012 г.
Декан
Факультета _______________ Прохватилов А.Ю.
подпись Ф.И.О.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС ДИСЦИПЛИНЫ

«МАТЕМАТИКА»

ЕН.Ф.1

наименование дисциплины в соответствии с ГОС

Селеменева Т.А.

кандидат педагогических наук, доцент

автор

________________030301.65 «Психология»_________________

шифр направления / специальности и ее название

ФАКУЛЬТЕТ ПСИХОЛОГИИ

наименование факультета

КАФЕДРА ЕСТЕСТВЕННО - НАУЧНЫХ ДИСЦИПЛИН

наименование кафедры

Санкт- Петербург
2012

МАТЕМАТИКА

Учебно-методический комплекс дисциплины / Авт.-сост. кандидат педагогических наук, доцент Т.А. Селеменева. – СПб: НОУ ПО АИГО, 2012. – 35с.

Программа утверждена на заседании факультета психологии
НОУ ВПО АИГО
протокол № 1 от «16» января 2012 года

Рецензенты
кандидат технических наук, доцент К.И. Кузьмин
кандидат психологических наук, доцент А.Ю. Прохватилов

Ответственный редактор
кандидат психологических наук, доцент К.И. Павлов

Ответственная за выпуск

Мордвинова Татьяна Борисовна

1. ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Курс «МАТЕМАТИКА» изучается студентами в соответствии с Государственным образовательным стандартом в рамках первого блока естественно-научных дисциплин и предназначен для студентов гуманитарных специальностей. На него опираются такие курсы, как математическая статистика, экспериментальная психология, математические методы в психологии и ряд других дисциплин.

Предмет курса – изучение основ математического анализа и высшей алгебры, теории вероятностей в объеме, необходимом для понимания математических понятий, приемов и методов, используемых в психологии.

Цель курса – общематематическая подготовка студентов-психологов, достаточная в дальнейшем для практической реализации математических и статистических методов, применяемых в психологии; развитие у студентов навыков логического мышления и формального обоснования научных гипотез.

Задачи курса:

- ознакомление студентов с основами математического аппарата, необходимого для решения научно-практических задач, возникающих в области психологического знания;
- формирование алгоритмического мышления;
- развитие абстрактного мышления, умения строго и последовательно излагать свои мысли;
- выработка у студентов навыков применения аппарата классической и современной математики при исследовании научно-прикладных проблем.

При изучении дисциплины основное внимание уделяется выработке навыков и умений использовать изученные математические понятия, приемы и методы в процессе решения научно-исследовательских и прикладных задач.

Требования к освоению курса

В результате освоения курса студент должен:

- получить представление об основных особенностях математического языка и методологии математического познания;
- продемонстрировать знание базовых понятий и теорий аппарата классической и современной математики, используемых при исследовании научно-прикладных проблем;
- овладеть умением применять математические понятия, приемы и методы для решения научно-практических задач, возникающих в области психологического знания.

В целях контроля процесса усвоения учебного материала осуществляется текущий, рубежный и итоговый контроль.

Итоговой формой контроля в 1-ом семестре является зачет, во 2-ом семестре – экзамен.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ИЗУЧЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

С целью организации учебных занятий необходимо, в первую очередь, использовать материал лекций и семинаров.

Особенностью курса является его прикладная направленность. Многообразие тем с примерами и задачами соответствующей предметной области – важнейшая черта курса. К особенности курса также можно отнести то, что рассмотрение большинства тем начинается с постановки проблемной задачи практического содержания, затем рассматривается соответствующий математический аппарат, позволяющий наиболее эффективно решить поставленную задачу.

Лекции должны носить фундаментальный характер с установкой на изучение студентами соответствующей темы и содержать теоретический материал с изложением методов решения задач, а также примеры решения задач для более глубокого усвоения материала. Лекционный материал создает проблемный фон с обозначением ориентиров, наполнение которых содержанием производится студентами на практических занятиях после работы с учебными пособиями, монографиями и справочной литературой.

На **практических занятиях** проводится работа по закреплению и использованию изученного теоретического материала для решения конкретных учебных задач. Практические занятия должны способствовать формированию у обучающихся творческого подхода к решению задач путем применения различных математических методов и приемов.

Основной целью **самостоятельной работы** студентов является усвоение изложенного и дополнительного теоретического материала, приобретения навыков его использования при решении и анализе общих и прикладных задач самостоятельно, без участия преподавателя. Самостоятельная работа развивает творческую активность студентов, формирует представление об индивидуальном стиле познавательной деятельности, совершенствует способность вычленять главное, развивает приемы логического мышления.

В самостоятельную работу включаются затраты времени на подготовку ко всем видам занятий, в том числе, контрольным работам.

Содержательная специфика курса сказывается и в характере промежуточных контрольных заданий (контрольная работа, домашние задания), и в обращении к интерактивным формам аудиторной и внеаудиторной работы.

В учебном плане дневного отделения на самостоятельное изучение дисциплины отведено 164 часа. Значительная часть этого времени отводится на самостоятельное знакомство с рекомендуемой литературой, работу с библиотечными фондами и электронными источниками информации. Вниманию студентов предлагается список литературы, контрольные вопросы и задания. По желанию студенты по интересующим вопросам могут написать рефераты, предварительно согласовав тему с преподавателем. Для подготовки к практическим занятиям преподавателем предлагается ряд вопросов для составления докладов.

По итогам изучения дисциплины учебным планом предусмотрен зачет. Список вопросов к зачету предоставляется студентам заранее с целью более тщательной подготовки.

3. Учебно - тематический план и распределение часов по курсу «МАТЕМАТИКА»
Квалификация «Специалист»
Очное отделение

п/п	Наименование темы	Всего аудит. часов	Лекции	Семинары и практ. занятия	Самост работа
1	Основные содержательные линии курса математики. Понятия и методы элементарной математики	4	8		10
2	Матрицы и определители	12	8	4	10
3	Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения	12	8	4	10
4	Геометрическое пространство. Системы координат.	12	8	4	10
5	Элементы теории множеств	4	8		10
6	Функция. Графики функций. Обратные и сложные функции	8	8	2	10

7	Предел и непрерывность	12	8	4	10
8	Производная функции и ее применение	18	8	6	10
9	Первообразная и неопределенный интеграл	12	8	4	10
10	Определенный интеграл	14	8	4	10
11	Основы комбинаторики и теории вероятностей	24	8	8	10
12	Историко-философские аспекты развития математики	4	8		18
	Итого: 300 часов	136	96	40	128

Учебно - тематический план и распределение часов по курсу «МАТЕМАТИКА»
Квалификация «Специалист»
Очное – заочное отделение

п/п	Наименование темы	Всего аудит. часов	Лекции	Семинары и практ. занятия	Самост работа
1	Основные содержательные линии курса математики. Понятия и методы элементарной математики				20
2	Матрицы и определители	6	4	2	22
3	Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения	6	4	2	22
4	Геометрическое пространство. Системы координат.	6	4	2	20
5	Элементы теории множеств				14
6	Функция. Графики функций. Обратные и сложные функции	4	2	2	18
7	Предел и непрерывность	4	4		22
8	Производная функции и ее применение	10	8	2	20
9	Первообразная и неопределенный интеграл	6	4	2	20
10	Определенный интеграл	8	6	2	16
11	Основы комбинаторики и теории вероятностей	14	10	4	28
12	Историко-философские аспекты развития математики				14
	Итого: 300 часов	64	46	18	236

Учебно - тематический план и распределение часов по курсу «МАТЕМАТИКА»
Квалификация «Специалист»
Заочное отделение

п/п	Наименование темы	Всего аудит. часов	Лекции	Семинары и практ. занятия	Самост работа
1	Основные содержательные линии курса математики. Понятия и методы элементарной математики				20
2	Матрицы и определители	2	2		26
3	Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения	4	2	2	26
4	Геометрическое пространство. Системы координат.	2	2		24
5	Элементы теории множеств	2	2		18
6	Функция. Графики функций. Обратные и сложные функции	2	2		20
7	Предел и непрерывность	2	2		26
8	Производная функции и ее применение	4	2	2	24
9	Первообразная и неопределенный интеграл	2	2		24
10	Определенный интеграл	2	2		20
11	Основы комбинаторики и теории вероятностей	6	4	2	28
12	Историко-философские аспекты развития математики				16
	Итого: 300 часов	28	22	6	272

4. СОДЕРЖАНИЕ ТЕМ ЛЕКЦИОННЫХ ЗАНЯТИЙ

ТЕМА 1. Основные содержательные линии курса математики. Понятия и методы элементарной математики

Понятие числа. Числовые множества. Универсальные законы и свойства числовых множеств. Понятие тождества. Виды алгебраических выражений. Уравнения и неравенства. Методы элементарной и неэлементарной математики.

ТЕМА 2. Матрицы и определители

Матрицы и их виды. Операции над матрицами. Основные свойства операций над матрицами. Определители квадратных матриц: определение и основные свойства. Общая формула для вычисления определителей. Миноры и алгебраические дополнения. Обратимые матрицы. Формула для нахождения обратной матрицы.

ТЕМА 3. Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения

Системы линейных уравнений: определение, примеры. Свойства систем уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность. Частные и общее решения систем уравнений. Эквивалентность систем, элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса). Метод Крамера

ТЕМА 4. Геометрическое пространство. Системы координат

Понятие пространства. Геометрическое пространство.Элементы аналитической геометрии. Системы координат на плоскости и в пространстве. Уравнения прямой на плоскости. Кривые второго порядка. Линии и поверхности в пространстве. Векторная алгебра.

ТЕМА 5. Элементы теории множеств

Элементы теории множеств.Множества и подмножества, их свойства. Конечные множества. Операции над множествами. Прямое (декартово) произведение двух множеств. Отношения между множествами.

ТЕМА 6. Функция. Графики функций. Обратные и сложные функции

Понятие функции. Функции действительного аргумента. График числовой функции. Способы задания функции. Монотонные, периодические, четные, нечетные функции. Элементарные функции и их графики. Обратная функция. Обратимая функция. Сложная функция.

ТЕМА 7. Предел и непрерывность

Понятие о числовых последовательностях. Последовательности как функции на множестве натуральных чисел. Предел последовательности. Бесконечно малые последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности. Число е как предел последовательности. Предел функции. Бесконечно малые функции. Теоремы о пределах. Замечательные пределы и их следствия. Непрерывные функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, промежуточного значения.

ТЕМА 8. Производная функции и ее применение

Понятие производной. Дифференцируемость функции в точке и на множестве. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции. Непрерывность дифференцируемой функции. Производная суммы, разности, произведения, частного. Производные элементарных функций. Производная сложной функции. Метод математичесой индукции. Производные высших порядков. Дифференциал функции и его свойства. Теоремы Ферма (необходимый признак экстремума), Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя. Условия возрастания и убывания функции. Достаточные признаки экстремума функции. Условия выпуклости и вогнутости функции. Применение производной к приближенному решению уравнений. Формула Тейлора. Постановка и решение простейших оптимизационных задач.

ТЕМА 9. Первообразная и неопределенный интеграл

Первообразная: определение, примеры. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции. Неопределенный интеграл и его свойства. Первообразные простейших функций. Интегрирование по частям. Замена переменной в неопределенном интеграле. Элементы функционального анализа. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций.

ТЕМА 10. Определенный интеграл

Определенный интеграл функции на отрезке как предел интегральных сумм. Геометрический смысл интеграла. Свойства определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл.

ТЕМА 11. Основы комбинаторики и теории вероятностей

Теория вероятностей. Вероятность и статистика. Введение в дискретную математику. Статистическое оценивание и проверка гипотез. Параметрические и непараметрические методы. Элементы дисперсионного анализа. Статистические методы обработки экспериментальных данных. Подмножества и выборки. Теорема о числе неупорядоченных подмножеств. Основные правила комбинаторики. Перестановки: понятие, виды, вычисление числа перестановок. Размещения: понятие, виды, вычисление числа размещений. Сочетания: понятие, вычисление числа сочетаний. Примеры комбинаторных проблем и задач. Основные понятия теории вероятностей.

ТЕМА 12. Историко-философские аспекты развития математики

Этапы развития математики. Зарождение математики. Период элементарной математики. Математика переменных величин. Обоснованность математических результатов. Математические методы. Приложения математики.

5. ПЛАН ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ

Практическое занятие №1. Матрицы и определители

Вопросы и задания:

1. Матрицы и их виды.
2. Операции над матрицами. Основные свойства операций над матрицами.
3. Определители квадратных матриц: определение и основные свойства. Общая формула для вычисления определителей.
4. Миноры и алгебраические дополнения.
5. Обратимые матрицы. Формула для нахождения обратной матрицы.

Практическое занятие № 2. Системы линейных алгебраических уравнений и методы их решения

Вопросы и задания:

1. Системы линейных уравнений: определение, примеры.
2. Свойства систем уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность.
3. Частные и общее решения систем уравнений.
4. Эквивалентность систем, элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем.
5. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений.
6. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса).
7. Метод Крамера

Практическое занятие №3. Геометрическое пространство. Системы координат

Вопросы и задания:

1. Понятие пространства. Геометрическое пространство.
2. Элементы аналитической геометрии.
3. Системы координат на плоскости и в пространстве.

4. Уравнения прямой на плоскости.
5. Кривые второго порядка.
6. Линии и поверхности в пространстве.

Практическое занятие № 4. Элементы теории множеств
Вопросы и задания:

1. Множества и подмножества, их свойства.
2. Конечные множества. Операции над множествами.
3. Прямое (декартово) произведение двух множеств.
4. Отношения между множествами.

Практическое занятие № 5. Функция. Графики функций. Обратные и сложные функции
Вопросы и задания:

1. Понятие функции. Функции действительного аргумента.
2. График числовой функции.
3. Способы задания функции.
4. Монотонные, периодические, четные, нечетные функции.
5. Элементарные функции и их графики.
6. Обратная функция.
7. Обратимая функция.
8. Сложная функция.

Практическое занятие № 6. Предел и непрерывность
Вопросы и задания:
1. Понятие о числовых последовательностях. Последовательности как функции на множестве натуральных чисел.
2. Предел последовательности.
3. Бесконечно малые последовательности.
4. Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
5. Число е как предел последовательности.
6. Предел функции. Бесконечно малые функции.
7. Теоремы о пределах.
8. Замечательные пределы и их следствия.
9. Непрерывные функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций.
10. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций.
11. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, промежуточного значения.

Практическое занятие № 7. Производная функции и ее применение
Вопросы и задания:
1. Понятие производной.
2. Дифференцируемость функции в точке и на множестве.
3. Геометрический смысл производной.
4. Уравнение касательной к графику функции.
5. Непрерывность дифференцируемой функции.
6. Производная суммы, разности, произведения, частного.
7. Производные элементарных функций.
8. Производная сложной функции.

9. Производные высших порядков.
10. Дифференциал функции и его свойства.
11. Теоремы Ферма (необходимый признак экстремума), Ролля, Лагранжа, Коши. Правило Лопиталя.
12. Условия возрастания и убывания функции.
13. Достаточные признаки экстремума функции.
14. Условия выпуклости и вогнутости функции.
15. Применение производной к приближенному решению уравнений.
16. Формула Тейлора.
17. Постановка и решение простейших оптимизационных задач.

Практическое занятие № 8. Первообразная и неопределенный интеграл
Вопросы и задания:
1. Первообразная: определение, примеры.
2. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции.
3. Неопределенный интеграл и его свойства.
4. Первообразные простейших функций.
5. Интегрирование по частям.
6. Замена переменной в неопределенном интеграле.
7. Методы интегрирования некоторых классов элементарных функций.

Практическое занятие № 9. Определенный интеграл
Вопросы и задания:
1. Определенный интеграл функции на отрезке как предел интегральных сумм.
2. Геометрический смысл интеграла.
3. Свойства определенного интеграла.
4. Формула Ньютона-Лейбница.
5. Приложения определенного интеграла. Несобственный интеграл.

Практическое занятие № 10. Основы комбинаторики и теории вероятностей
Вопросы и задания:
1. Подмножества и выборки.
2. Теорема о числе неупорядоченных подмножеств.
3. Основные правила комбинаторики.
4. Перестановки: понятие, виды, вычисление числа перестановок.
5. Размещения: понятие, виды, вычисление числа размещений.
6. Сочетания: понятие, вычисление числа сочетаний.
7. Примеры комбинаторных проблем и задач.
8. Основные понятия теории вероятностей.
9. Теорема сложения и следствия из нее.
10. Условная вероятность. Независимость событий.
11. Теорема умножения и следствия из нее.
12. Система гипотез. Формула полной вероятности.
13. Формула Байеса.
14. Повторение испытаний. Формула Бернулли.

6. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЗАЧЕТУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

1. Матрицы и их виды. Операции над матрицами. Основные свойства операций над матрицами
2. Определители квадратных матриц: определение и основные свойства. Общая формула для вычисления определителей

3. Обратимые матрицы. Формула для нахождения обратной матрицы
4. Системы линейных уравнений. Свойства систем уравнений: совместность, несовместность, определенность, неопределенность
5. Эквивалентность систем, элементарные преобразования, сохраняющие эквивалентность систем
6. Однородные и неоднородные системы линейных уравнений
7. Метод исключения неизвестных (метод Гаусса)
8. Применение метода Крамера для решения систем уравнений
9. Понятие пространства. Геометрическое пространство.
10. Элементы аналитической геометрии. Системы координат на плоскости и в пространстве.
11. Уравнения прямой на плоскости.
12. Кривые второго порядка.
13. Линии и поверхности в пространстве.
14. Множества и подмножества, их свойства. Конечные множества. Операции над множествами.
15. Прямое (декартово) произведение двух множеств.
16. Отношения между множествами.
17. Понятие функции. Функции действительного аргумента.Способы задания функции.
18. Монотонные, периодические, четные, нечетные функции.
19. Элементарные функции и их графики.
20. Обратная функция. Обратимая функция. Сложная функция
21. Понятие о числовых последовательностях. Последовательности как функции на множестве натуральных чисел
22. Предел последовательности. Бесконечно малые последовательности. Существование предела монотонной ограниченной последовательности
23. Предел функции. Бесконечно малые функции
24. Теоремы о пределах
25. Замечательные пределы и их следствия
26. Непрерывные функции. Теоремы о непрерывности суммы, разности, произведения и частного непрерывных функций
27. Непрерывность сложной функции. Непрерывность элементарных функций
28. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, достижение наибольшего и наименьшего значений, промежуточного значения
29. Понятие производной. Дифференцируемость функции в точке и на множестве
30. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции
31. Непрерывность дифференцируемой функции
32. Производная суммы, разности, произведения, частного
33. Производные элементарных функций
34. Производная сложной функции
35. Производные высших порядков
36. Дифференциал функции и его свойства
37. Теоремы Ферма (необходимый признак экстремума), Ролля, Лагранжа, Коши.
38. Правило Лопиталя
39. Условия возрастания и убывания функции. Достаточные признаки экстремума функции
40. Условия выпуклости и вогнутости функции
41. Применение производной к приближенному решению уравнений

7. КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ К ЭКЗАМЕНУ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

1. Определенный интеграл. Функции на отрезке как предел интегральных сумм
2. Геометрический смысл интеграла
3. Свойства определенного интеграла
4. Формула Ньютона-Лейбница
5. Приложения определенного интеграла
6. Несобственный интеграл
7. Основные понятия комбинаторики. Подмножества и выборки.
8. Теорема о числе неупорядоченных подмножеств. Примеры применения
9. Основные правила комбинаторики.
10. Перестановки: понятие, виды, вычисление числа перестановок.
11. Размещения: понятие, виды, вычисление числа размещений.
12. Сочетания: понятие, вычисление числа сочетаний.
13. Основные понятия теории вероятностей. Испытания и события. Виды событий
14. Теорема сложения и следствия из нее
15. Условная вероятность. Независимость событий
16. Теорема умножения и следствия из нее
17. Система гипотез. Формула полной вероятности
18. Формула Байеса
19. Повторение испытаний. Формула Бернулли
20. Этапы развития математики. Зарождение математических знаний
21. Период элементарной математики.
22. Математика переменных величин
23. Математические методы и их приложения

8. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИКА»

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

1. Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2+x-4}{x^3-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+6x^2-15x-2}{x^3-4x^2+3x+2}$.

2. Найдите точки разрыва и определите тип точек разрыва функции

$$y(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ 1-x, & 0\le x<1 \\ \dfrac{1}{x-1}, & x>1 \end{cases}$$

3. Начертите эскиз графика функции (см. №2).

4. Вычислите производную функции $y(x)=(\sin x)^{\cos x}$.

5. Найите асимптоты функции $y(x)=\dfrac{x^3}{x^2+9}$.

6. Решите систему уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=5 \\ 2x_1-x_2+x_3=8 \\ -3x_1+10x_2+4x_3=-1 \end{cases}.$$

7. Проведите исследование функции $y(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$ по схеме и постройте ее график.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №2

1.Сколькими способами шесть человек могут встать в очередь друг за другом?
2.Замок имеет трехзначный цифровой шифр. Наугад набираются три цифры. Какова вероятность открыть замок с первой попытки, если известно, что цифры не повторяются?
3.Сколько матчей будет сыграно в чемпионате с участием шестнадцати команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?
4.При первичном обследовании пациента вероятность обнаружения заболевания А составляет 0,6, а заболевания В – 0,8. Найдите вероятность обнаружения при первичном обследовании пациента обоих заболеваний при независимости одного заболевания от другого.
5. Для решения актуальной проблемы объединились две научные школы. Какова вероятность, что проблема будет решена, если вероятность ее успешного решения первой научной школой оценивается как 0,5, а второй – 0,6.
6.Группа испытуемых состоит из 10 мужчин и 10 женщин. Для проведения тестирования произвольным образом выбран один испытуемый, затем – второй. Какова вероятность, что первым и вторым испытуемыми оказались мужчины?
7. Для зачета преподаватель подготовил 30 задач по теории вероятностей и 20 задач – по статистике. Чтобы получить зачет, студенту нужно решить одну, наугад взятую, задачу. Студент умеет решать 18 задач по статистике и 15 – по теории вероятностей. Какова вероятность получения зачета?

9. СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Основная:

1. Бородин А.Н., Элементарный курс теории вероятностей и математической статистики. М.: Лань, 2009.
2. Вавилов В.В. и др. Задачи по математике. Начала анализа. М.: Наука, 2010.
3. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: Наука, 2008.
4. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. М.: Рольф, 2009.
5. Натансон И.П. Краткий курс высшей математики. М.: Лань, 2011.

Дополнительная:

1. Виленкин Н.Я. Рассказы о множествах. М.: Наука, 2009.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 2009.
3. Ивашов-Мусатов О.С. Основы математического анализа. М.: Наука, 2010.
4. Колмогоров А.Н., Журбенко И.Г., Прохоров А.В., Введение в теорию вероятностей. М.: Наука, 2002.

Вспомогательная:

1. Курош А.Г. Курс высшей алгебры М.: Гостехиздат, 2005.
2. Ланкастер П. Теория матриц. М. Наука, 2008.
3. Мальцев А.И. Основы линейной алгебры. М.: Наука, 2000.
4. Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Физматгиз. 2002.
5. Самовол В.С., Куренкова Е.А. Математика. Часть II. Основы линейной алгебры. М.: Издательство РГГУ. 2008.

10. РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

1. Матрицы и операции над ними

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где – i номер строки, j – номер столбца. Матрица записывается в виде

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Символ «$m \times n$» характеризует размер матрицы и обозначает ее порядок (размерность). Заметим, что матрицы $A_{m\times n}$ и $B_{n\times m}$ есть матрицы разного порядка.

Виды матриц:

1. Матрица–строка – матрица, состоящая из одной строки. Например, $A = \ 1 \quad -2 \quad 0 \quad 5$ – матрица–строка.

2. Матрица–столбец – матрица, состоящая из одного столбца. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ – матрица–столбец.

3. Квадратная матрица – матрица, у которой число строк равно числу столбцов. Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \\ 0 & 2 & 8 \\ -5 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ – квадратная матрица третьего порядка.

4. Диагональная матрица – квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю. Например, $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ – диагональная матрица третьего порядка.

5. Единичная матрица – диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице. Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ – единичная матрица четвертого порядка.

6. Нулевая матрица – матрица, все элементы которой равны нулю. Например, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – нулевая матрица третьего порядка.

7. Транспонированная матрица – матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером. Например, для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, транспонированная

матрица имеет вид $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Над матрицами, как и над числами можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны операциям над числами, а некоторые – специфические.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы A на число k называется матрица $B = k \cdot A$, элементы которой $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$, ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Пример 1.1. Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ на число 4.

Решение. $4A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4\cdot 1 & 4\cdot(-3) & 4\cdot 0 \\ 4\cdot(-2) & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -12 & 0 \\ -8 & 16 & 4 \end{pmatrix}$.

Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$).

Пример 1.2. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти $A + B$.

Решение. $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2 & 3+4 \\ 6+0 & 2+8 \\ 5+3 & 1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 6 & 10 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$.

Вычитание матриц. Разность двух матриц одинакового размера $m \times n$ определяется через предыдущие операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$.

Умножение матриц. Произведение матриц имеет место только для матриц определенных размерностей. Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т.е. если A имеет размерность $m \times k$, то матрица B должна иметь размерность $k \times n$. Произведением будет матрица размерности $m \times n$.

Произведением матриц $\underset{m\times k}{A} \cdot \underset{k\times n}{B}$ называется матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов $i-й$ строки матрицы A на соответствующие элементы $j-го$ столбца матрицы B.

Пример 1.3. Вычислить произведение матриц $A \cdot B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения: $\underset{1\times 3}{A} \cdot \underset{3\times 2}{B} = \underset{1\times 2}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B: $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+3\cdot 2+4\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 0+4\cdot 2 \\ 2\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$.

Пример 1.4. Найти матрицу $D = AB + 2C$, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведение матриц A и B возможно. Умножая элементы строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B, получим $AB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 0+3\cdot 2 & 1\cdot 1+3\cdot 7 \\ 4\cdot 0+0\cdot 2 & 4\cdot 1+0\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Умножим матрицу C на число 2, получим $2C = 2\cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 & 2\cdot 3 \\ 2\cdot 2 & 2\cdot 4 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$. Найдем сумму матриц AB и $2C$: $D = AB + 2C = \begin{pmatrix} 6 & 22 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 6+2 & 22+6 \\ 0+4 & 4+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 28 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$.

2. Определители квадратных матриц

Определитель (детерминант) – это число, соответствующее данной квадратной матрице и вычисленное по определенному правилу.

Для обозначения определителей используются следующие символы: $|A|$, Δ, $\det A$. Символ A обозначает таблицу (матрицу), для которой вычисляется определитель.

Определитель матрицы первого порядка $A = \left(a_{11} \right)$ или просто определитель первого порядка равен самому числу a_{11}: $\Delta = |a_{11}| = a_{11}$.

Например, пусть $A = \left(5 \right)$, тогда $|A| = |5| = 5$.

Определителем матрицы второго порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, или определителем второго порядка называется число, которое вычисляется по формуле: $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

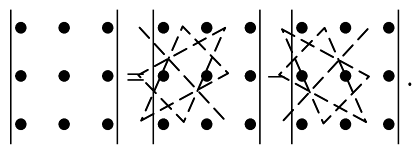
Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, тогда $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - 5\cdot 2 = -4$.

Определителем матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ или определителем третьего порядка называется число, которое вычисляется по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Это число представляет алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы.

Вычисление определителя третьего порядка иллюстрируется схемой:



Пример 2.1. Вычислить определители третьего порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot5\cdot0 + 3\cdot(-2)\cdot(-2) + 2\cdot1\cdot(-1) - (-2)\cdot5\cdot(-1) - 3\cdot2\cdot0 -$

$-(-2)\cdot1\cdot1 = 2$.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы $n-го$ порядка называется определитель матрицы $(n-1)-го$ порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием $i-ой$ строки и $j-го$ столбца.

Пример 2.2. Найти минор элемента a_{13} матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 4 \\ 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение. Из полученной матрицы A вычеркнем первую строку, и третий столбец, получим $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot1 - 5\cdot3 = -13$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы $n-го$ порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Пример 2.3. Найти алгебраическое дополнение элемента a_{12} матрицы третьего порядка $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 8 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Из полученной матрицы A вычеркнем первую строку, и второй столбец, полученный минор возьмем со знаком $(-1)^{1+2}$, т.е. $A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} 8 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -(8\cdot4 - 1\cdot(-2)) = -34$.

3. Обратная матрица.

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1} такое, что произведение $a\cdot a^{-1} = 1$. Аналогичное понятие вводится и для квадратных матриц.

Матрица A^{-1} называется *обратной по отношению к квадратной матрице* A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная матрица называется невырожденной, в противном случае (при $|A| = 0$) – вырожденной.

Алгоритм нахождения вычисления обратной матрицы.

1. Найти определитель исходной матрицы. Если $|A| = 0$, то матрица A – вырожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.
2. Найти матрицу A^T, транспонированную к матрице A.
3. Найти алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A_{ij}^T = A_{ij}$ ($i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$).
4. Из полученных алгебраических дополнений составить присоединенную матрицу A.

5. Вычислить обратную матрицу по формуле $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A$.

6. Проверить правильность вычисления обратной матрицы A^{-1}, исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Пример 3.1. Найти обратную матрицу к матрице $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. Найдем определитель исходной матрицы A: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -3 + 0 - 8 - 6 - 0 + 6 = -11$. Так как $|A| \neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует. Транспонированная матрица к матрице A имеет вид $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Найдем алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы: $A_{11} = -1^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3$, $A_{12} = -1^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$, $A_{13} = -1^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7$,

$A_{21} = -1^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 4$, $A_{22} = -1^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3$, $A_{23} = -1^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2$,

$A_{31} = -1^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -6$, $A_{32} = -1^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1$, $A_{33} = -1^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 3$.

Из полученных алгебраических дополнений составим присоединенную матрицу A: $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Вычислим обратную матрицу: $A^{-1} = -\frac{1}{11} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 & -7 \\ 4 & -3 & -2 \\ -6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему трех уравнений первой степени с тремя неизвестными x_1, x_2, x_3:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}.$$

Решением данной системы называется такая совокупность чисел $x_1 = k_1$, $x_2 = k_2$, $x_3 = k_3$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Для исследования вопроса о нахождении решения данной системы необходимо предварительно вычислить следующие четыре определителя:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Определитель Δ называется определителем системы. Вспомогательные определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются из определителя системы Δ заменой свободными членами элементов соответственно первого, второго и третьего столбцов.

При решении системы возможны три различные ситуации.

1. Если определитель Δ системы отличен от нуля $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений имеет единственное решение, определяемое по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

2. Если определитель системы равен нулю $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2, Δ_3 отличен от нуля, то система решений не имеет, т.е. несовместна.

3. Если $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, то система линейных уравнений неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Пример 4.1. Решить систему уравнений $\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -6 \\ -4x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$.

Решение. Найдем определитель системы $\Delta = \begin{vmatrix} -5 & 4 & 5 \\ -4 & 6 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 30 + 20 + 24 - -60 - 15 - 16 = -17$. Так как $\Delta \neq 0$, то система линейных уравнений имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц Δ_1, Δ_2, Δ_3, полученных из определителя системы Δ заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -6 & 4 & 5 \\ -3 & 6 & 3 \\ 4 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 36 + 15 + 48 - 120 - 18 - 12 = -51,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -5 & -6 & 5 \\ -4 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -15 - 80 - 36 + 30 + 60 + 24 = -17, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} -5 & 4 & -6 \\ -4 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -120 - 24 - 24 +$$

$$+72 + 15 + 64 = -17.$$

По формулам Крамера находим единственное решение системы линейных уравнений: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-51}{-17} = 3$, $x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1$, $x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-17}{-17} = 1$.

5. Элементы векторной алгебры

Величины, которые полностью определяются своим численным значением, называются скалярными. Примерами скалярных величин являются: площадь длина, объем, масса.

Другие величины, например сила, скорость, ускорение, определяются не только своим числовым значением, но и направлением. Такие величины называются векторными. Векторная величина геометрически изображается с помощью вектора.

Вектором называется направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ с начальной точкой A и конечной точкой B.

Векторы могут обозначаться как двумя прописными буквами, так и одной строчной с чертой или стрелкой, т.е. $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}$.

Длиной (или модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка, изображающего вектор и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается через $\vec{e}$.

Векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

Пример 5.1. Даны три вектора $\vec{a} = (2;4;0)$, $\vec{b} = (0;-3;1)$, $\vec{c} = (5;-1;2)$. Найти координаты вектора $\vec{d} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.

Решение. Так как при умножении вектора на число его координаты умножаются на это число, то $2\vec{a} = (4;8;0)$, $-3\vec{b} = (0;9;-3)$. При сложении векторов их соответствующие координаты складываются, следовательно, $\vec{d} = (9;16;-1)$.

Зная координаты вектора можно определить его длину. Длина вектора $\vec{a} = (x;y;z)$ вычисляется по формуле $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Пример 5.2. Даны точки $A(3;3;2)$ и $B(0;1;2)$. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$.

Решение. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB} = (0-3;1-3;2-2) = = (-3;-2;0)$. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 0^2} = 5$.

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\alpha$.

Пример 5.3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\alpha = 60^\circ$.

Решение. Так как $\left|\vec{a}\right| = 5$, $\left|\vec{b}\right| = 2$, $\alpha = 60^\circ$, то скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \cdot 2 \cdot \cos 60^\circ = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5$.

Скалярное произведение векторов можно выразить через координаты векторов $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$ и $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$, тогда угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле $\cos\alpha = \dfrac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$.

Пример 5.4. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и угол между ними, если $\vec{a} = (2;-5;4)$, $\vec{b} = (-1;2;7)$.

Решение. Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \cdot (-1) + + (-5) \cdot 2 + 4 \cdot 7 = 16$.

Длина вектора $\vec{a}$ равна $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{2^2 + (-5)^2 + 4^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$, длина вектора $\vec{b}$ – $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 7^2} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6}$. Косинус угла между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен

$$\cos\alpha = \frac{16}{3\sqrt{5}\cdot 3\sqrt{6}} = \frac{16}{9\sqrt{30}} = \frac{8\sqrt{30}}{135}$$, откуда $\alpha = \arccos\frac{8\sqrt{30}}{135}$.

Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называют такой вектор $\vec{c}$, который определяется тремя условиями:

1. длина вектора $\vec{c}$ равна $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$ где α угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
2. вектор $\vec{c}$ перпендикулярен каждому из векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
3. векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку векторов.

Векторное произведение $\vec{a}$ на $\vec{b}$ обозначается $\vec{a}\times\vec{b}$.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами в декартовой системе координат: $\vec{a} = x_1; y_1; z_1$, $\vec{b} = x_2; y_2; z_2$, то векторное произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ можно найти с помощью разложения определителя: $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$.

Пример 5.5. Найти векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a} = 1;1;2$, $\vec{b} = 2;1;0$.

Решение. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4\vec{j} + \vec{k} - 2\vec{k} - 2\vec{i} = -2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ или $\vec{a}\times\vec{b} = -2; 4; -1$.

Согласно определению векторного произведения векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ $|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin\alpha$, тогда площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равна модулю векторного произведения этих векторов, т.е. $S_{пар} = |\vec{a}\times\vec{b}|$, а площадь треугольника ABC равна половине площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $S_\Delta = \frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Пример. 5.6. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3; -2; 6$, $\vec{b} = 6; 3; -2$.

Решение. Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равно $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} + 36\vec{j} + 9\vec{k} + 12\vec{k} - 18\vec{i} + 6\vec{j} = -14\vec{i} + 42\vec{j} + 21\vec{k}$ или $\vec{a}\times\vec{b} = -14; 42; 21$.

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ равна $S_{пар} = |\vec{a}\times\vec{b}| = = \sqrt{-14\ ^2 + 42^2 + 21^2} = 49$ кв. ед.

Смешанными произведением векторов трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ называется число, равное скалярному произведению вектора $\vec{a}$ на векторное произведение векторов $\vec{b}$ и $\vec{c}$, т.е. $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{a}\cdot\ \vec{b}\times\vec{c}$.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами в декартовой системе координат: $\vec{a} = x_1; y_1; z_1$, $\vec{b} = x_2; y_2; z_2$, $\vec{c} = x_3; y_3; z_3$, то смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ можно найти по формуле: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Пример 5.7. Найти смешанное произведение $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, если $\vec{a} = 1;1;2$, $\vec{b} = 1;-2;3$, $\vec{c} = 2;1;1$.

Решение. Смешанное произведение векторов равно $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = = -2+2+6+8-3-1=10$.

Смешанное произведение трех векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку, т.е. $V_{парал.} = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Объем тетраэдра, построенного на этих же векторах, равен $V_{тетр.} = \pm\frac{1}{6}\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Пример 5.8. Найти объем тетраэдра с вершинами в точках A $-1;1;0$, B $2;-2;1$, C $3;1;-1$, D $1;0;-2$.

Решение. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$: $\overrightarrow{AB} = 3;-3;1$, $\overrightarrow{AC} = 4;0;-1$, $\overrightarrow{AD} = 2;-1;-2$. Искомый объем тетраэдра равен $\frac{1}{6}$ объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$. Таким образом, $V_{тетр} = \pm\frac{1}{6}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{6}\cdot\ -4+6-3-24\ = \frac{25}{6}$ куб. ед.

6. Элементы аналитической геометрии

Линия на плоскости часто задается множеством точек, обладающих некоторым только присущим геометрическим свойством. Например, окружность радиуса R есть множество всех точек плоскости, удаленных на расстоянии R от некоторой фиксированной точки O (центра окружности).

Введение на плоскости системы координат позволяет определять положение точки плоскости заданием двух чисел – ее координат, а положение линии на плоскости определять с помощью уравнения (т.е. равенства связывающее координаты точки линии).

Уравнение линии (или кривой) на плоскости Oxy называется такое уравнение $F\ x;y\ = 0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки линии и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение линии позволяет изучить ее геометрические свойства с помощью исследования ее уравнения. Простейшим из линий является прямая. Разным способам задания прямой соответствуют в прямоугольной системе координат разные виды ее уравнений.

Уравнение первой степени относительно x и y вида $Ax+By+C=0$ называется общим уравнением прямой на плоскости, где A, B и C – произвольные числа, причем A и B не равны нулю одновременно.

Если в общем уравнении прямой $B \neq 0$, то, разрешив его относительно y, получим уравнение вида $y = kx+b$, где $k = -A/B$, $b = -C/B$. Его называют уравнением прямой с угловым коэффициентом, поскольку $k = tg\,\alpha$, α – угол, образованный прямой с положительным направлением оси Ox. Свободный член уравнения b равен ординате точки пересечения прямой с осью Oy.

Острый угол между двумя прямыми $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ определяется по формуле $tg\alpha=\left|\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|$.

Если прямые $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$ параллельны, то условие параллельности имеет вид $k_1=k_2$. Если прямые перпендикулярны, то условие перпендикулярности имеет вид $k_1=-\dfrac{1}{k_2}$.

Уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M\ \ x_0;y_0$ записывается в виде $y-y_0=k\ \ x-x_0$.

Если известны координаты точек $M_1\ \ x_1;y_1$ и $M_2\ \ x_2;y_2$, то уравнение прямой, проходящей через две точки имеет вид $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Под расстоянием от точки $M\ \ x_0;y_0$ до прямой $Ax+By+C=0$ понимается длина перпендикуляра, опущенного из точки M на данную прямую. Расстояние от точки M до прямой находится по формуле $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$.

Пример 6.1. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1\ \ -3;5$ и $M_2\ \ 7;-2$.

Решение. Воспользуемся уравнением $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$: $\dfrac{x-\ \ -3}{7-\ \ -3}=\dfrac{y-5}{-2-5}$ или $\dfrac{x+3}{10}=\dfrac{y-5}{-7}$, откуда $7x+10y-29=0$.

Пример 6.2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\ \ -1;4$ параллельно прямой $2x+3y+5=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен $k_1=-\dfrac{2}{3}$. Искомая прямая параллельна данной, поэтому ее угловой коэффициент равен $k_2=k_1=-\dfrac{2}{3}$.

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой: $y-4=-\dfrac{2}{3}\ \ x-\ \ -1$ или $y-4=-\dfrac{2}{3}\ \ x+1$, откуда $2x+3y-10=0$.

Пример 6.3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M\ \ -4;3$ перпендикулярно прямой $2x-3y-4=0$.

Решение. Угловой коэффициент данной прямой равен $k_1=\dfrac{2}{3}$. Искомая прямая перпендикулярна данной, поэтому ее угловой коэффициент равен $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-\dfrac{3}{2}$.

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой: $y-3=-\dfrac{3}{2}\ \ x-\ \ -4$ или $y-3=-\dfrac{3}{2}\ \ x+4$, откуда $3x+2y+6=0$.

Пример 6.4. Даны координаты точек $A\ \ 1;2$, $B\ \ 2;0$, $C\ \ -1;1$. Найти:

1. уравнения сторон треугольника ABC;
2. уравнение медианы, опущенной из вершины A;

3. длину и уравнение высоты, опущенной из вершины B.

Решение.

1. Для нахождения уравнений сторон треугольника ABC воспользуемся формулой $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

Найдем уравнение стороны AB: $\dfrac{x-1}{2-1}=\dfrac{y-2}{0-2}$, $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-2}{-2}$, $-2(x-1)=y-2$, $-2x+2=y-2$, $2x+y-4=0$. Найдем уравнение стороны BC: $\dfrac{x-2}{-1-2}=\dfrac{y-0}{1-0}$, $\dfrac{x-2}{-3}=\dfrac{y}{1}$, $x-2=-3y$, $x+3y-2=0$. Найдем уравнение стороны AC: $\dfrac{x-1}{-1-1}=\dfrac{y-2}{1-2}$, $\dfrac{x-1}{-2}=\dfrac{y-2}{-1}$, $-(x-1)=-2(y-2)$, $-x+1=-2y+4$, $x-2y+3=0$.

2. Пусть точка M середина стороны BC, тогда координаты точки M равны $x_M=\dfrac{x_B+x_C}{2}=\dfrac{2-1}{2}=\dfrac{1}{2}$, $y_M=\dfrac{y_B+y_C}{2}=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}$. Уравнение медианы AM определим по формуле $\dfrac{x-x_A}{x_M-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_M-y_A}$. Найдем уравнение медианы AM: $\dfrac{x-1}{\frac{1}{2}-1}=\dfrac{y-2}{\frac{1}{2}-2}$, откуда $3x-y-1=0$.

3. Найдем уравнение прямой, проходящей через точку B перпендикулярно прямой AC.

Разрешив уравнение прямой AC относительно y, получим $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}$. Угловой коэффициент прямой AC равен $k_1=\dfrac{1}{2}$. Искомая прямая перпендикулярна прямой AC, поэтому ее угловой коэффициент равен $k_2=-\dfrac{1}{k_1}=-2$.

Используя уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным угловым коэффициентом, получим уравнение искомой прямой: $y-0=-2(x-2)$, откуда $2x+y-4=0$.

Расстояние от точки B до прямой AC равно $d=\dfrac{|1\cdot 2-2\cdot 0+3|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$.

Уравнение плоскости, записанное в виде $Ax+By+Cz+D=0$, называется общим уравнением плоскости, где A, B, C, D – произвольные числа, причем A, B и C не равны нулю одновременно, причем $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

Три точки пространства $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$, не лежащие на одной прямой, определяют единственную плоскость. Уравнение $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-x_1 & z_3-x_1 \end{vmatrix}=0$ есть уравнение плоскости, проходящей через три данные точки.

Пример 6.5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1;-3;4)$, $M_2(0;-2;-1)$ и $M_3(1;1;-1)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-x_1 & z_3-x_1 \end{vmatrix}=0$. Так как

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ 0-1 & -2+3 & -1-4 \\ 1-1 & 1+3 & -1-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y+3 & z-4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 15(x-1)-5(y+3)-4(z-4).$$

Запишем искомое уравнение плоскости: $15x-5y-4z-14=0$.

Пусть даны уравнения двух плоскостей $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$.

Условием параллельности двух плоскостей является пропорциональность коэффициентов при одноименных переменных $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$, а условием их перпендикулярности $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

Острый угол между плоскостями определяется по формуле $\cos\alpha=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$.

Пример 6.6. Найти острый угол между плоскостями $7x-11y+8z+19=0$ и $x+4y-10z-5=0$.

Решение. Воспользуемся формулой $\cos\alpha=\dfrac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$. Так как $\cos\alpha=\dfrac{|7\cdot1+(-11)\cdot4+8\cdot(-10)|}{\sqrt{7^2+11^2+8^2}\sqrt{1^2+4^2+10^2}}=\dfrac{117}{\sqrt{234}\cdot\sqrt{117}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, то угол между плоскостями $7x-11y+8z+19=0$ и $x+4y-10z-5=0$ равен $\alpha=45^\circ$.

Пример 6.7. Даны координаты вершин треугольной пирамиды $ABCD$: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Требуется найти: длину ребра AB; уравнение плоскости ABC; площадь грани ABC; объем пирамиды.

Решение. Так как $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-3)$, то длина ребра AB равна $|AB|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{4+4+9}=\sqrt{17}$.

Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$: $\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-12x-24y+8z+88$. Уравнение плоскости ABC имеет вид $3x+6y-2z-22=0$.

Определим площадь грани ABC. Координаты векторов равны $\overrightarrow{AB}=(2;-2;-3)$, $\overrightarrow{AC}=(4;0;6)$, векторное произведение равно $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix}=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}$. Площадь грани ABC равна $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{144+576+64}=\dfrac{1}{2}\sqrt{784}=14$ кв. ед.

Объем треугольной пирамиды равен $V=\pm\dfrac{1}{6}\begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix}=\dfrac{154}{3}$ куб. ед.

7. Пределы и непрерывность

Число A называется пределом числовой последовательности a_1, $a_2,\ldots$, $a_n,\ldots$, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такой номер N (зависящий от ε, $N = N(\varepsilon)$), что для всех членов последовательности с номерами $n > N$ верно неравенство: $|a_n - A| < \varepsilon$.

Предел числовой последовательности обозначается $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ или $a_n \to A$ при $n \to \infty$. Последовательность, имеющая предел, называется сходящийся, в противном случае – расходящейся.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к бесконечности, если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $S > 0$ (зависящее от ε; $S = S(\varepsilon)$), что для всех x таких, что $|x| > S$, верно неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Число A называется пределом функции $y = f(x)$ при x, стремящемся к x_0 (или в точке x_0), если для любого, даже сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число $\delta > 0$ (зависящее от ε; $\delta = \delta(\varepsilon)$), что для всех x, не равных x_0 и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство: $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. Предел алгебраической суммы конечного числа функций равен такой же сумме пределов этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x) + \varphi(x)\right] = = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.
2. Предел произведений конечного числа функций равен произведению пределов этих функций, т.е. $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\cdot\varphi(x)\right] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.
3. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций (при условии, что предел делителя не равен нулю), т.е. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}\ \left(\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0\right)$.

Первым замечательным пределом называется $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$, вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$.

Пример 7.1. Найти следующие пределы: а) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x-1}$, в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-1}{2x^2-3x+2}$.

Решение.

а) Так как $x \to 4$, то числитель дроби стремиться к числу $5\cdot 4 + 2 = 22$, а знаменатель – к числу $2\cdot 4 + 3 = 11$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{5x+2}{2x+3} = \dfrac{22}{11} = 2$.

б) Числитель и знаменатель дроби при $x \to 1$ стремиться к нулю (неопределенность вида $0/0$). Разложим на множители числитель дроби: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-6x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x-5)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-5) = -4$.

в) Умножим числитель и знаменатель дроби на сумму $(\sqrt{x+4}+2)$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}-2\right)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+4}\right)^2-2^2}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+4-4}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+4}+2}=\frac{1}{\sqrt{0+4}+2}=\frac{1}{4}.$$

г) Числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают при $x\to\infty$. В таком случае говорят, что имеет место неопределенность вида ∞/∞. Разделив на x^2 числитель и знаменатель дроби, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2-1}{2x^2-3x+2}==\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{6x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{6-\frac{1}{x^2}}{2-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{6}{2}=3,$$ так как при $x\to\infty$ каждая из дробей $1/x^2$, $3/x$, $2/x^2$ стремиться к нулю.

Пример 7.2. Используя первый замечательный предел вычислить: а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 2x}$, б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 5x}{x^2}$.

Решение.

а) Используя первый замечательный предел, имеем: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{\sin 2x}==\frac{9}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 9x}{9x}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}=\frac{9}{2}$.

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 6x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 3x}{x^2}=2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)^2=2\cdot 3^2\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^2=2\cdot 3^2=18.$$

Пример 7.3. Используя второй замечательный предел вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x}$.

Решение. $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+4}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3+1}{x+3}\right)^{2x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x+3}+\frac{1}{x+3}\right)^{2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3-3}\right)^2=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\cdot\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{-3}\right)^2=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{x+3}\right)^{x+3}\right)^2=e^2.$$

Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она удовлетворяет следующим трем условиям: 1) определена в точке x_0 (т.е. существует $f(x_0)$);

2) имеет конечный предел функции при $x\to x_0$; 3) этот предел равен значению функции в точке x_0, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Пример 7.4. Для каждой из заданных функций найти точки разрыва и исследовать их характер: а) $f(x)=\frac{x+1}{x-6}$, б) $f(x)=\begin{cases}x^2, & при\ x\le 1\\ x-2, & при\ x>1\end{cases}$.

Решение.

а) Функция $f(x)=\frac{x+1}{x-6}$ не определена в точке $x=6$ и, следовательно, в этой точке функция терпит разрыв. Найдем односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to 6-0}\frac{x+1}{x-6}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 6+0}\frac{x+1}{x-6}=+\infty$. Так как односторонние пределы равны бесконечности, значит, точка $x=6$ – точка разрыва 2-го рода, точка бесконечного разрыва.

б) Функция $f\ \ x\ = \begin{cases} x^2, & при\ \ x \le 1 \\ x-2, & при\ \ x > 1 \end{cases}$ в точке $x=1$ не является непрерывной – первое условие непрерывности выполнено – существует $f\ \ 1\ = 1^2 = 1$, но нарушено второе условие отсутствует $\lim\limits_{x\to 1} f\ \ x$ (точнее говоря, здесь существуют односторонние пределы функции слева $\lim\limits_{x\to 1-0} x^2 = 1$ и справа $\lim\limits_{x\to 1+0}\ x-2\ = -1$, но общего предела при $x \to 1$ не существует).

8. Производная и дифференциал

Производной функции $y = f\ \ x$ называется предел отношения приращения функции к приращению независимой переменной при стремлении последнего к нулю (если этот предел существует):

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\ \ x+\Delta x\ - f\ \ x}{\Delta x}.$$

Производная функции имеет несколько обозначений: y', $f'\ \ x$, $\frac{dy}{dx}$. Иногда в обозначении производной используется индекс, указывающий, по какой переменной взята производная, например, y'_x.

Нахождение производной функции называется дифференцированием этой функции.

Таблица производных основных элементарных функций

$x\ '=1$	$e^x\ '=e^x$	$\sin x\ '=\cos x$	$\arcsin x\ '=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$x^n\ '=nx^{n-1}$	$a^x\ '=a^x\ln a$	$\cos x\ '=-\sin x$	$\arccos x\ '=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\sqrt{x}\ '=\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x\ '=\frac{1}{x}$	$tg\ '=\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{arc}\,tgx\ '=\frac{1}{1+x^2}$
$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$	$\log_a x\ '=\frac{1}{x\ln a}$	$ctg\ '=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{arc}\,ctgx\ '=-\frac{1}{1+x^2}$

Пример 8.1. Найти производные функций: а) $y = x^7$, б) $y = 4^x$.

Решение.

а) $y = x^7$ – степенная функция. Используя формулу производной для степенной функции, получим $y' = \ x^7\ ' = 7x^{7-1} = 7x^6$.

б) $y = 4^x$ – показательная функция. Используя формулу производной для показательной функции, получим $y' = \ 4^x\ ' = 4^x \ln 4$.

Основные правила дифференцирования:

1. Производная постоянной равна нулю, т.е. $(c)'=0$.

2. Производная алгебраической суммы конечного числа дифференцируемых функций равна такой же сумме производных этих функций, т.е. $(u+v)'=u'+v'$.

3. Производная произведения двух дифференцируемых функций равна произведению первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго, т.е. $(uv)'=u'v+uv'$.

Следствие. Постоянный множитель можно выносить за знак производной $(cu)'=cu'$.

4. Производная частного двух дифференцируемых функций может быть найдена по формуле $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Пример 8.2. Найти производные функций: а) $y=\sin x+\sqrt{x}$, б) $y=x^5\sin x$, в) $y=\dfrac{e^x}{\cos x}$.

Решение.

а) По правилу дифференцирования суммы двух функций, получим $y'=(\sin x)'+(\sqrt{x})'=\cos x+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

б) По правилу дифференцирования произведения двух функций, получим $y'=(x^5)'\cdot\sin x+x^5\cdot(\sin x)'=5x^4\sin x+x^5\cos x$.

в) б) По правилу дифференцирования частного двух функций, получим $y'=\dfrac{(e^x)'\cdot\cos x-e^x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x}=\dfrac{e^x\cos x+e^x\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{e^x(\cos x+\sin x)}{\cos^2 x}$.

Пусть переменная y есть функция от переменной u, а переменная u в свою очередь есть функция от независимой переменной x, т.е. задана сложная функция $y=f\left[\varphi(x)\right]$.

Теорема. Если $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции существует и равна производной данной функции по промежуточному аргументу и умноженной на производную самого промежуточного аргумента по независимой переменной x, т.е. $y'=f'(u)\cdot u'$.

Пример 8.3. Найти производные функций: а) $y=(x^2+3x)^4$, б) $y=\ln(x^3+4x)$, в) $y=\sin^2 x$.

Решение.

а) Функцию $y=(x^2+3x)^4$ можно представить в виде $y=u^4$, где $u=x^2+3x$, тогда $y'=4u^3\cdot u'=4(x^2+3x)^3\cdot(x^2+3x)'=4(x^2+3x)^3\cdot(2x+3)$.

б) Имеем $y=\ln u$, где $u=x^3+4x$, тогда $y'=\dfrac{u'}{u}=\dfrac{(x^3+4x)'}{x^3+4x}=\dfrac{3x^2+4}{x^3+4x}$.

в) Имеем $y=u^2$, где $u=\sin x$, тогда $y=2u\cdot u'=2\sin x\cdot(\sin x)'==2\sin x\cos x=\sin 2x$.

Производная y' сама является функцией, которая также может иметь производную. *Производной* $n-$*го порядка* называется производная от производной $(n-1)-$*го* порядка.

Пример 8.4. Найти производную второго порядка от функции $y=x\sin x$.

Решение. Дифференцируя данную функцию, получим $y' = \sin x + x\cos x$. Дифференцируя производную y', найдем вторую производную $y'' = \cos x + \cos x - x\sin x = 2\cos x - x\sin x$.

Дифференциалом функции называется главная, линейная относительно Δx часть приращения функции, равная произведению производной на приращение независимой переменной $dy = f'(x)\Delta x$.

Дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной. Поэтому формулу для дифференцирования функции можно записать в виде $dy = f'(x)dx$, откуда $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

Пример 8.5. Найти дифференциал функции $y = \sin(x + x^3)$.

Решение. Дифференциал функции $dy = \left(\sin(x + x^3)\right)' dx =$

$= \cos(x + x^3) \cdot (x + x^3)' dx = (1 + 3x^2)\cos(x + x^3)dx$.

Дифференциалом второго порядка (или вторым дифференциалом) d^2y функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала первого порядка этой функции, т.е. $d^2y = d(dy)$.

Аналогичного дифференциалом $n-го$ порядка (или $n-м$ дифференциалом) $d^n y$ называется дифференциал от дифференциала $(n-1)-го$ порядка этой функции, т.е. $d^n y = d(d^{n-1}y)$.

Итак, по определению $d^2y = d(dy)$. Найдем выражение второго дифференциала функции $y = f(x)$. Так как $dx = \Delta x$ не зависит от x, то при дифференцировании считаем dx постоянным: $d^2y = d(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'dx = = f''(x)dxdx = f''(x)dx^2$, т.е. $d^2y = f''(x)dx^2$. Аналогично, выражение $n-го$ дифференциала функции имеет вид $d^n y = f^{(n)}(x)dx^n$.

Пример 8.6. Найти d^2y, если $y = e^{x^2+3}$.

Решение. Так как $y' = 2xe^{x^2+3}$, $y'' = 2e^{x^2+3} + 4x^2e^{x^2+3}$, то $d^2y = (2e^{x^2+3} + 4x^2e^{x^2+3})dx^2$.

9. Исследование функций

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на промежутке X, если для любых x_1, $x_2 \in X$, $x_2 > x_1$ верно неравенство $f(x_2) > f(x_1)$ $(f(x_2) < f(x_1))$.

Если производная дифференцируемой функции положительна внутри некоторого промежутка X, то она возрастает на этом промежутке.

Если производная дифференцируемой функции отрицательна внутри некоторого промежутка X, то она убывает на этом промежутке.

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности точки x_0 выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ $(f(x) > f(x_0))$.

Значение функции в точке максимума (минимума) называется максимумом (минимумом) функции. Максимумы и минимумы функции называются экстремумами функции.

Для того чтобы дифференцируемая функция $y = f(x)$ имела в точке x_0 экстремум, необходимо, чтобы $y'(x_0) = 0$ и достаточно, чтобы при переходе через точку x_0 происходила смена знака первой производной.

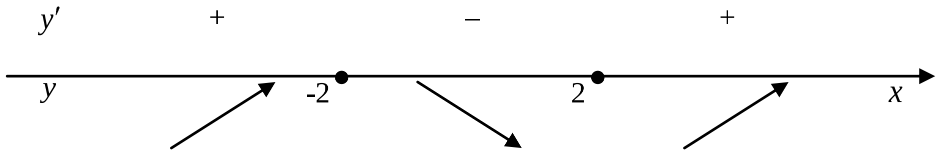
Пример 9.1. Найти экстремумы функции $y = x^3 - 12x - 1$.

Решение.

1. Дифференцируя данную функцию, находим $y' = 3x^2 - 12$.

2. Приравнивая производную к нулю, находим критические точки функции $x_1 = -2$, $x_2 = 2$. Точек, в которых производная не существует, у данной функции нет – $f'(x)$ определена на всей числовой оси.

3. Нанесем критические точки на числовую прямую и определим знак производной на каждом интервале.



Согласно достаточному условию точка $x = -2$ является точкой максимума, точка $x = 2$ – точкой минимума.

4. Находим $y_{\min} = y(2) = -17$, $y_{\max} = y(-2) = 15$.

График функции $y = f(x)$ называетсявыпуклым (вогнутым) на интервале (a, b), если он расположен ниже (выше) любой касательной к графику функции на этом интервале.

Достаточное условие существования точки перегиба. Пусть график функции определяется уравнением $y = f(x)$. Если $f''(x_0) = 0$ или не существует, и при переходе через значение $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то точка $x = x_0$ есть точка перегиба.

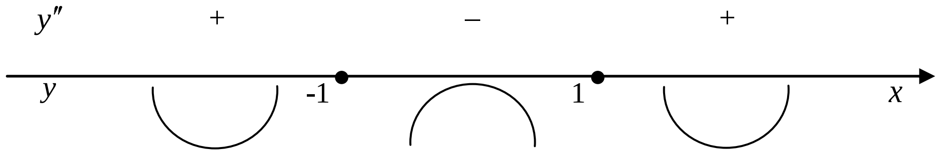
Пример 9.2. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба график функции $y = x^4 - 6x^2 + 1$

Решение.

1. Дифференцируя данную функцию дважды, находим $y' = 4x^3 - 12x$, $y'' = 12x^2 - 12x$.

2. Приравнивая вторую производную к нулю, и находим точки, в которых вторая производная равна нулю $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.

3. Нанесем точки на числовую прямую и определим знак второй производной на каждом интервале.



4. Функция выпукла вниз на интервалах $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$, вверх – $(-1; 1)$. Точки $x = -1$, $x = 1$ являются точками перегиба.

Асимптотой графика функции $y = f(x)$ называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на графике функции, стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат вдоль графика.

Для нахождения асимптот пользуются следующими положениями:

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (исключая, возможно, саму эту точку) и хотя бы один из пределов функции $x \to x_0 - 0$ (слева) или при $x \to x_0 + 0$ (справа) равен бесконечности, т.е. $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$. Тогда прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой графика функции $y = f(x)$.

2. Пусть функция $y = f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечный предел функции $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$. Тогда прямая $y = b$ есть горизонтальная асимптота графика функции $y = f(x)$.

3. Пусть функция $y=f(x)$ определена при достаточно больших x и существует конечные пределы $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=k$ и $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right]=b$. Тогда прямая $y=kx+b$ является наклонной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Пример. 9.3. Найти вертикальные асимптоты графика функции $y=\frac{3}{x+1}$.

Решение. Точка $x=-1$ – точка разрыва II рода. Так как $\lim\limits_{x\to-1-0}\frac{3}{x+1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0}\frac{3}{x+1}=+\infty$, то прямая $x=-1$ является вертикальной асимптотой.

Пример 9.4. Найти горизонтальные асимптоты графика функции $y=\frac{3x^2-1}{x^2+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2-1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}=3$, то прямая $y=3$ является горизонтальной асимптотой.

Пример 9.5. Найти наклонные асимптоты графика функции $y=\frac{x^2+4}{x+1}$.

Решение. Так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x(x+1)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4}{x^2+x}=1$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+4}{x+1}-x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4-x^2-x}{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4-x}{x+1}=-1$, то прямая $y=x-1$ является наклонной асимптотой.

При исследовании функций и построении их графиков рекомендуется использовать следующую схему:

1. Найти область определения функции.
2. Исследовать функцию на четность и нечетность.
3. Найти вертикальные асимптоты.
4. Исследовать поведение функции в бесконечности, найти горизонтальные или наклонные асимптоты.
5. Найти экстремумы и интервалы монотонности функции.
6. Найти интервалы выпуклости функции и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения с осями координат и, возможно, некоторые дополнительные точки, уточняющие график.

Пример 9.6. Исследовать функцию $y=\frac{1-2x^3}{x^2}$ по приведенной выше схеме.

Решение.

1. Область определения функции: $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

2. Функция общего вида, так как $y(-x)=\frac{1-2(-x)^3}{(-x)^2}=\frac{1+2x^3}{x^2}$.

3. Вертикальные асимптоты могут пересекать ось абсцисс в точке $x=0$. Так как $\lim\limits_{x\to0-}\frac{1-2x^3}{x^2}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to0+}\frac{1-2x^3}{x^2}=+\infty$, то прямая $x=0$ является вертикальной асимптотой.

4. Поведение функции в бесконечности. Вычислим: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^3}-2}{\frac{1}{x}}=-\infty$.

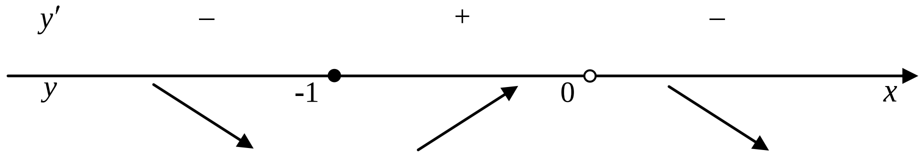
Функция горизонтальных асимптот не имеет.

Так как $k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^3}{x^3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^3}-2\right)=-2$, $b=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1-2x^3}{x^2}+2x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-2x^3+2x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, то прямая $y=-2x$ является наклонной асимптотой.

5. Найдем экстремумы и интервалы монотонности функции. Дифференцируя данную функцию, находим $y'=\left(\frac{1-2x^3}{x^2}\right)'==\frac{-6x^2\cdot x^2-2x\cdot\ 1-2x^3}{x^4}=\frac{-6x^4-2x+4x^4}{x^4}=-\frac{2x^3+2}{x^3}$.

Приравнивая производную к нулю, находим критические точки функции $x=-1$. В точке $x=0$ производная не существует. Определим знак производной на каждом интервале.

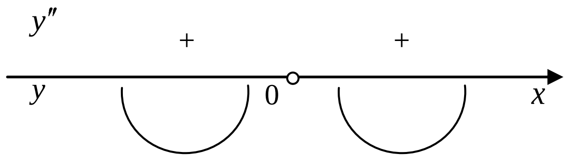


Функция возрастает на интервале $-1;0$, убывает – $-\infty;-1$, $0;+\infty$. Точка $x=-1$ является точкой минимума $y_{\min}=y\ \ -1\ \ =3$.

6. Определим интервалы выпуклости функции и точки перегиба.

Найдем производную второго порядка $y''=\left(-\frac{2x^3+2}{x^3}\right)'==-\frac{6x^2\cdot x^3-3x^2\cdot\ 2x^3+2}{x^6}=-\frac{6x^3-3\ \ 2x^3+2}{x^4}=-\frac{6x^3-6x^3-6}{x^4}=\frac{6}{x^4}$.

Приравнивая вторую производную к нулю, и находим точки, в которых вторая производная равна нулю или не существует $x\neq 0$. Знаки производной второго порядка указаны на рисунке.



Функция выпукла вверх на интервалах $-\infty;0$, $0;+\infty$. Точек перегиба нет.